Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
11.05.2024. – VI разред

1. У три суда наливена је вода. Ако $\frac{1}{2}$ воде из првог суда прелијемо у други, затим $\frac{1}{3}$ воде, која се сада нашла у другом суду, прелијемо у трећи, и на крају $\frac{1}{4}$ укупне количине воде из трећег суда прелијемо у први, тада ће се у сваком суду наћи по 6 литара воде. Колико је литара воде у почетку било у сваком суду?

2. Нека је M тачка на катети BC правоуглог троугла ABC, таква да је $BM = 2MC$. Ако је K средиште хипотенузе AB овог троугла, докажи да је $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$.

3. Предузеће за доставу хране има запослених 50 достављача и почиње да ради у 8 ујутру, када су прве испоруке. Следеће испоруке су на сваких сат времена (у 9:00, у 10:00, ...). Последња испорука је у 18:00. Дана 11. маја сваки достављач је у нека 4 термина (сата) достављао храну. Докажи да је у неком сату барем 19 достављача достављало храну.

4. Одреди цифре a, b, c (не обавезно различите) такве да важи:

$$0,abab\ldots + 0,abcabc\ldots = \frac{33}{37}.$$

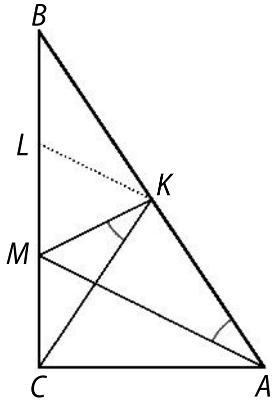
5. Нека је M тачка на страници AB квадрата $ABCD$, таква да је $\measuredangle ADM = 20°$, а N тачка на страници BC таква да је $CN = DM - AM$. Одреди меру $\measuredangle MDN$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI разред

1. У последњем преливању из трећег суда је преливена четвртина воде, па ако је у трећем суду пре преливања било c литара воде, тада је $\frac{3}{4}\cdot c=6$, одакле је c = 8 [**2 бода**]. Дакле, у последњем преливању је из трећег суда у први преливено 2 литра воде, па је пре трећег преливања у првом суду било 4 литра воде, у другом 6, а у трећем 8 литара [**5 бодова**]. У другом преливању трећина воде из другог суда је преливена у трећи, па ако је у другом суду пре преливања било b литара воде, онда је $\frac{2}{3}\cdot b=6$, одакле је b = 9 [**2 бода**]. Дакле, из другог суда је преливено 3 литра воде, па је пре другог преливања у првом суду било 4 литра воде, у другом 9, а у трећем 5 литара воде [**5 бодова**]. Коначно, у првом преливању је из првог суда половина воде преливена у други, па ако је у првом суду било a литара воде, онда је $\frac{1}{2}\cdot a=4$, одакле је a = 8 [**1 бод**], па закључујемо да су у првом преливању из првог суда у други преливена 4 литра воде, па је на почетку у првом суду било 8 литара воде, у другом 5 и у трећем 5 литара воде [**5 бодова**].

2. Нека је тачка L средиште дужи BM. Тада је $BL = LM = MC$ [**2 бода**]. Уочимо да је LK средња линија троугла MAB, па је $LK \parallel MA$ [**2 бода**], одакле следи да је $\measuredangle BKL = \measuredangle BAM$ [**5 бодова**], па је довољно доказати да је $\measuredangle BKL = \measuredangle MKC$. Како је $BK = KC$, троугао BKC је једнакокрак [**2 бода**], одакле следи да је $\measuredangle LBK = \measuredangle MCK$ [**3 бода**]. Сада уочавамо да су троуглови LKB и MCK подударни ($BL = MC$, $BK = KC$, $\measuredangle LBK = \measuredangle MCK$, став СУС) [**4 бода**], па је $\measuredangle BKL = \measuredangle MKC$ [**2 бода**].



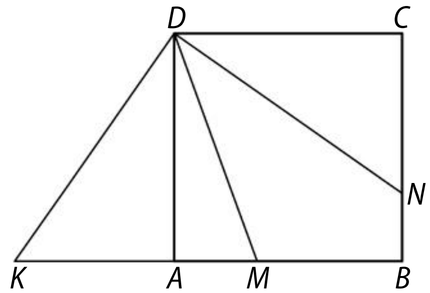
3. Сви достављачи су укупно радили у 50 · 4 = 200 термина за доставу [**3 бода**]. Постоји укупно 11 термина за доставу хране [**1 бод**]. Како је 200 = 11 · 18 + 2, по Дирихлеовом принципу, постоји бар 19 достављача који су у истом сату достављали храну [**16 бодова**].

4. Важи да је $0,abab\ldots=\frac{\overline{ab}}{99}$ [**2 бода**] и $0,abcabc\ldots=\frac{\overline{abc}}{999}$ [**2 бода**], па се услов своди на $\frac{\overline{ab}}{99}+\frac{\overline{abc}}{999}=\frac{33}{37}$, одакле се добија $2210a + 221b + 11c = 9801$ [**3 бода**]. Следи да је $9801 - 221 \cdot 9 - 11 \cdot 9 \le 2210a \le 9801$ [**3 бода**], па је једина могућност $a = 4$ [**3 бода**]. На исти начин из једнакости $221b + 11c = 961$ [**2 бода**] следи да је $b = 4$ [**3 бода**], па је $c = 7$ [**2 бода**].

5. Нека је K тачка на правој AB таква да важи распоред $K - A - M - B$ и $AK = CN$. Тада су троуглови ADK и CDN подударни ($CD = AD$, $\measuredangle NCD = \measuredangle KAD$, $CN = AK$), па је $\measuredangle CDN = \measuredangle ADK$ [**5 бодова**]. Такође, важи:

$MK = AM + AK = AM + CN = MD$ [**5 бодова**],

па је троугао DMK једнакокрак [**2 бода**]. Како је $\measuredangle ADM = 20°$, то је $\measuredangle DMK = 70°$, па је $\measuredangle MKD = \measuredangle MDK = 55°$ [**3 бода**]. Сада је $\measuredangle CDN = \measuredangle ADK = 55° - 20° = 35°$ [**2 бода**], па је $\measuredangle MDN = 90° - 20° - 35° = 35°$ [**3 бода**].



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

11.05.2024.

VII разред

1. Колико цифара има у запису производа $8^5 \cdot 5^{10} \cdot 15^5$?

2. У правоуглом троуглу ABC са катетама $AC = 6$ cm и $BC = 8$ cm конструисана је висина CH. У сваки од добијених троуглова AHC и BCH уписане су кружнице које висину CH додирују у тачкама M и N. Одреди дужину дужи MN.

3. Одреди све могуће вредности за природан број n, $n \geq 4$, тако да

$$\frac{3n^2-2n+50}{3n-2} \notin \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \frac{n^3-3}{n-3} \in \mathbb{N}.$$

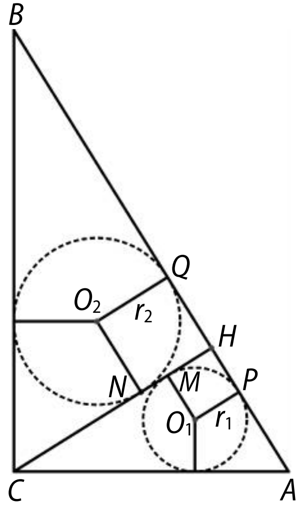
4. Дат је троугао ABC у коме је $\measuredangle BCA = 60°$. Нека симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D, а симетрала угла ABC страницу AC у тачки E. Докажи да је $AB = AE + BD$.

5. На колико начина можемо бројеве у скупу $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ обојити црвеном, зеленом или плавом бојом, тако да је сваки број обојен различитом бојом у односу на све његове праве делиоце?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII разред

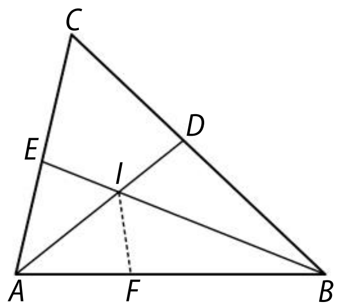
1. Важи да је $8^5 \cdot 5^{10} \cdot 15^5 = (2^3)^5 \cdot 5^{10} \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^{15} \cdot 5^{15} \cdot 3^5$ [**8 бодова**] $=$ $(2 \cdot 5)^{15} \cdot 3^5 = 243 \cdot 10^{15}$ [**7 бодова**] $= 243\underbrace{00...00}_{15}$, па запис производа има $3 + 15 = 18$ цифара [**5 бодова**].



2. Означимо центре уписаних кружница у троуглове AHC и BCH редом са O_1 и O_2, полупречнике кружница са r_1 и r_2, а тачке додира кружница и хипотенузе са P и Q (види слику). Четвороуглови $PHMO_1$ и HQO_2N су квадрати страница r_1 и r_2, па је тражена дужина једнака $NH - MH = r_2 - r_1$ [**4 бода**]. Одредимо вредности за r_2 и r_1. Из Питагорине теореме је $AB = 10$ cm [**1 бод**]. Из површине троугла ABC је $AC \cdot BC = AB \cdot CH$, па је $CH = 4{,}8$ cm [**2 бода**]. Применом Питагорине теореме на троуглове AHC и BCH добијамо да је $BH = 6{,}4$ cm [**2 бода**] и $AH = 3{,}6$ cm [**2 бода**]. Означимо са O_{AHC} и O_{BHC} обиме троуглова AHC и BHC. Тада из површина ових троуглова имамо $\frac{AH \cdot CH}{2} = \frac{r_1 \cdot O_{AHC}}{2}$ и $\frac{BH \cdot CH}{2} = \frac{r_2 \cdot O_{BHC}}{2}$ одакле је $r_1 = 1{,}2$ cm [**4 бодова**] и $r_2 = 1{,}6$ cm [**4 бодова**], па је $MN = 0{,}4$ cm [**1 бод**].

3. Важи да је $\frac{3n^2-2n+50}{3n-2} = \frac{n(3n-2)+50}{3n-2} = n + \frac{50}{3n-2}$ [**3 бода**], па да наведени разломак не би био природан број, треба да важи $3n - 2 \nmid 50$ [**3 бода**], тј. $3n - 2 \notin \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$, па узимајући у обзир да је $n \geq 4$ и да је природан број, то $n \notin \{4, 9\}$ [**2 бода**]. Даље, важи да је $\frac{n^3-3}{n-3} = \frac{n^3-3n^2+3n^2-9n+9n-27+27-3}{n-3}$, тј. $\frac{n^3-3}{n-3} = n^2+3n+9+\frac{24}{n-3}$ [**5 бодова**]. Да би овај разломак био природан број, мора да важи $n - 3 \mid 24$ [**3 бода]**, тј. $n \in \{4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}$ [**2 бода**]. Коначно, тражени бројеви су $n \in \{5, 6, 7, 11, 15, 27\}$ [**2 бода**].

4. Нека је тачка I центар уписане кружнице троугла ABC и нека је тачка F на дужи AB таква да је $AF = AE$ [**3 бода**]. Докажимо да је $BF = BD$, одакле директно следи тврђење. Обележимо угао BAC са α, а угао ABC са β. Тада је $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$. Из троугла BEC је $\measuredangle BEC = 120° - \frac{\beta}{2}$ [**1 бод**], па је $\measuredangle AEI = 60° + \frac{\beta}{2}$ као његов спољашњи угао [**1 бод**]. Како је троугао AFI подударан са троуглом AEI (по ставу СУС, $AF = AE$, $AI = AI$, $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \frac{\alpha}{2}$), то је $\measuredangle AFI = \measuredangle AEI = 60° + \frac{\beta}{2}$ [**4 бода**], па је $\measuredangle BFI = 120° - \frac{\beta}{2}$ [**1 бода**] као његов спољашњи угао. Са друге стране, из троугла ADC је угао $\measuredangle ADC = 120° - \frac{\alpha}{2}$ [**1 бода**], па је $\measuredangle BDI = 60° + \frac{\alpha}{2}$ [**1 бода**] као његов спољашњи угао. Како је $\measuredangle BCA = 60°$, то је $\alpha + \beta = 120°$, па је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = 60°$, одакле је $\measuredangle BDI = 60° + 60° - \frac{\beta}{2} = 120° - \frac{\beta}{2} = \measuredangle BFI$ [**4 бода**]. Одатле су троуглови BFI и BDI подударни (по ставу УСУ, сви углови једнаки, и заједничка страница BI). Из те подударности закључујемо да је $BD = BF$ [**4 бода**], што је и требало доказати.



5. *I начин*. Бројеви 5 и 7 не деле ниједан други број нити имају праве делиоце међу датим бројевима, па их можемо обојити на $3 \cdot 3 = 9$ начина, независно од осталих бројева [**2 бода**]. Број 6 има два права делиоца 2 и 3, који нису делиоци један другог, па ћемо разликовати следеће случајеве:

1) Бројеви 2 и 3 су обојени различитом бојом.

Бројеве 2 и 3 можемо обојити на 6 начина [**2 бода**], док је боја броја 6 једнозначно одређена [**1 бод**]. Бројеве 4 и 9 можемо обојити сваки на по 2 начина [**2 бода**], док је боја броја 8 једнозначно одређена [**1 бод**]. Према томе, у овом случају имамо $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ начина за бојење [**2 бода**].

2) Бројеви 2 и 3 су обојени истом бојом.

Бројеве 2 и 3 можемо обојити на 3 начина [**1 бод**], а број 6 на 2 начина [**2 бода**]. Бројеве 4 и 9 можемо обојити сваки на по 2 начина [**2 бода**], док је боја 8 једнозначно одређена [**1 бод**]. Према томе, у овом случају имамо $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ бојења [**2 бода**].

Коначно, укупан број начина на који можемо урадити тражена бојења је $(24 + 24) \cdot 9 = 432$ [**2 бода**].

II начин. Бројеви 2,4 и 8 морају бити обојени различитим бојама што је могуће урадити на 6 начина [**4 бода**]. Како 2 дели 6, њега можемо обојити са неком од преостале две боје [**3 бода**]. Пошто 3 дели 6 и он има 2 могућности за бојење [**3 бода**], а онда и за 9 имамо 2 могућности [**3 бода**]. Бројеви 5 и 7 су узајамно прости са сваким од осталих бројева у скупу, па се могу обојити било којом од боја, сваки на 3 начина [**4 бода**]. Укупно имамо $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 432$ начина [**3 бода**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

11.05.2024.

VIII разред

1. Одреди остатак при дељењу броја $19^{61} + 87^{87}$ са 44.

2. У координатном систему у равни дата је тачка $T(2, 4)$. Кроз тачку T повучене су праве p и q. Права p сече x-осу у тачки A, а y-осу у тачки D. Права q сече x-осу у тачки B, а y-осу у тачки C. Одредити једначине правих p и q ако су троуглови ABT и CDT једнакокраки са основицама AB и CD, редом, а однос њихових површина износи $P_{ABT} : P_{CDT} = 9 : 4$.

3. На колико начина можемо свако теме правилног осмоугла обојити плавом или црвеном бојом тако да не постоје четири темена исте боје која су темена правоугаоника?

4. Нека су a, b, c природни бројеви, при чему је $a \neq b$. Ако важи да је $\frac{a}{b}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$, докажи да $a^2 + b^2 + c^2$ није прост број.

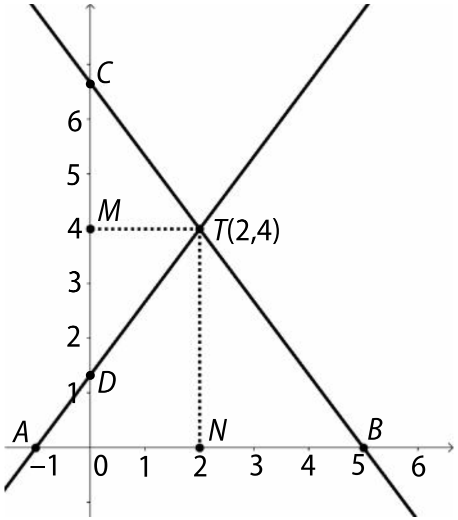
5. Нека су P и Q тачке на страницама DE и EF, редом, правилног шестоугла $ABCDEF$ за које важи да је збир $EP + EQ$ једнак страници шестоугла. Означимо пресек дужи BP и CQ са R.
а) Одреди меру угла BRC.
б) Докажи да су површине троугла BCR и четвороугла $PRQE$ једнаке.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII разред

1. *I начин*. Приметимо да је $87 \equiv -1 \pmod{44}$, па важи $87^{87} \equiv (-1)^{87} \pmod{44} \equiv -1 \pmod{44}$ [**6 бодова**]. Даље, приметимо да је $19^5 \equiv -1 \pmod{44}$ [**6 бодова**], па је $19^{61} \equiv 19^{60} \cdot 19 \pmod{44} \equiv (-1)^{12} \cdot 19 \pmod{44} \equiv 19 \pmod{44}$ [**6 бодова**]. Коначно, $19^{61} + 87^{87} \equiv 19 + (-1) \pmod{44} \equiv 18 \pmod{44}$ [**2 бода**].
II начин. Исто као у првом решењу закључимо да је $87^{87} \equiv -1 \pmod{44}$ [**6 бодова**]. Даље је $19 \equiv -1 \pmod 4$, па је $19^{61} \equiv (-1)^{61} \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4$ [**3 бода**]. Како је $19^5 \equiv -1 \pmod{11}$, то је $19^{61} \equiv (-1)^{12} \cdot 19 \pmod{11} \equiv 8 \pmod{11}$ [**5 бодова**]. Дакле, $19^{61} = 11k + 8$, за неко $k \in N$. Узимајући у обзир остатак при дељењу са 4, закључујемо да је $k = 4l + 1$, за неко $l \in N$. Одатле је $19^{61} = 44l + 19$, тј. остатак при дељењу 19^{61} са 44 је 19 [**4 бода**]. Коначно, $19^{61} + 87^{87} \equiv 19 + (-1) \pmod{44} \equiv 18 \pmod{44}$ [**2 бода**].

2. Троугао ABT је једнакокрак, па тачка N, подножје висине из темена T на основицу AB, представља средиште дужи AB. Ако означимо $|AB| = a$, тада је $|NB| = \frac{a}{2}$. Како је $|TN| = 4$, то је $P_{ABT} = 2a$ [**2 бода**]. Слично, троугао CDT је једнакокрак, па тачка M, подножје висине из темена T на основицу CD, представља средиште дужи CD. Ако означимо $|CD| = b$, тада је $|MC| = \frac{b}{2}$. Како је $|TM| = 2$, то је $P_{CDT} = b$ [**2 бода**]. Из услова $P_{ABT} : P_{CDT} = 9 : 4$ добијамо да је $b=\frac{8}{9}a$ [**2 бода**]. Како је $TM \parallel NB$ и $CM \parallel TN$, то су троуглови CMT и TNB слични, па је $CM : MT = TN : NB$, одакле је $ab = 32$ [**3 бода**]. Ако услов $b=\frac{8}{9}a$ уврстимо у ову једначину добијамо да је $a = 6$ [**2 бода**]. Координате тачке N су $(2,0)$, па су координате тачака A и B једнаке $A(-1,0)$ и $B(5,0)$ [**3 бода**]. Праве p садржи тачке A и T. Заменом координата ових тачака у једначини праве p и решавањем система од две једначине са две непознате, добијамо да је тражена једначина праве p: $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ [**3 бода**]. Аналогно, права q садржи тачке B и T, па решавањем одговарајућег система једначина добијамо да је једначина праве q: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$ [**3 бода**].



3. Приметимо да су четири темена правилног осмоугла уједно и темена правоугаоника ако и само ако су дијагонале тог правоугаоника уједно и пречници описане кружнице осмоугла [**3 бода**]. Међу четири пречника, како их бојимо са 2 боје, највише два могу имати крајње тачке истих боја [**2 бода**] (ако имамо три пречника чије су крајње тачке истих боја, онда би, према Дирихлеовом принципу, барем два морала имати крајње тачке истих боја, што није дозвољено јер би онда постојао правоугаоник чија су сва четири темена обојена истом бојом). Зато разликујемо следеће случајеве:

1) ако нема пречника чије су крајње тачке обојене истим бојама, тада крајње тачке сваког пречника можемо обојити на 2 начина, па је тражени број бојења $2^4 = 16$ [**4 бода**].

2) ако су на једном пречнику крајње тачке обојене истом бојом, онда тај пречник можемо одабрати на 4 начина, могуће га је обојити на два начина, а код преостала три пречника сваки је могуће обојити на два начина, па је укупан број бојења $4 \cdot 2 \cdot 2^3 = 64$ [**5 бодова**];

3) ако су на два пречника крајње тачке обојене истом бојом, онда 2 од четири пречника можемо одабрати на 6 начина ($(4 \cdot 3) : 2 = 6$), могуће их је обојити на 2 начина, а код преостала два пречника сваки је могуће обојити на два начина, па је укупан број бојења $6 \cdot 2 \cdot 2^2 = 48$ [**5 бодова**].

Дакле, укупан број бојења је $16 + 64 + 48 = 128$ [**1 бод**].

4. Унакрсним множењем добијамо $ab^2 + ac^2 = ba^2 + bc^2$, тј. $ab^2 - ba^2 = ac^2 - bc^2$, што је након растављања $(a - b)(c^2 - ab) = 0$ [**2 бода**], што уз услов $a \neq b$ даје $c^2 = ab$ [**2 бода**]. Одатле је $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab = (a + b)^2 - c^2$ [**2 бода**]. Применом разлике квадрата добијамо да је $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b - c)(a + b + c)$ [**2 бода**], па је једина могућност да овај број буде прост да је $a + b - c = 1$, док је $a + b + c$ прост [**4 бода**]. Но, онда је по неједнакости између аритметичке и геометријске средине $c + 1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2c$ [**4 бода**], па како је c природан, то је $c = 1$ [**2 бода**]. Тада је из $a + b = c + 1$ и $a = b = 1$, што је супротно претпоставци да је $a \neq b$ [**2 бода**]. Одатле закључујемо да $a^2 + b^2 + c^2$ није прост број.

5. а) Из услова да је $EP + EQ$ једнак страници шестоугла следи да је $DP = EQ$ [**1 бод**]. Троуглови BDP и CEQ су подударни (правоугли троуглови чије су катете једнаке) [**3 бода**], па је $\measuredangle BPD = \measuredangle CQE$ [**1 бод**]. Из једнакости $\measuredangle EQR + \measuredangle EPR = \measuredangle BPD + \measuredangle BPE = 180°$ [**2 бода**] закључујемо да је четвороугао $PRQE$ тетиван [**3 бода**], одакле је $\measuredangle BRC = \measuredangle PRQ = 180° - \measuredangle PEQ = 60°$ [**2 бода**].

б) Четвороуглови $BCDP$ и $CDEQ$ су подударни (једнаке дужине страница и унутрашњи углови) [**3 бода**], па имају и једнаке површине. Имамо да је

$$P_{BRC} = P_{BCDP} - P_{CDPR} = P_{CDEQ} - P_{CDPR} = P_{PRQE}$$ [**5 бодова**].